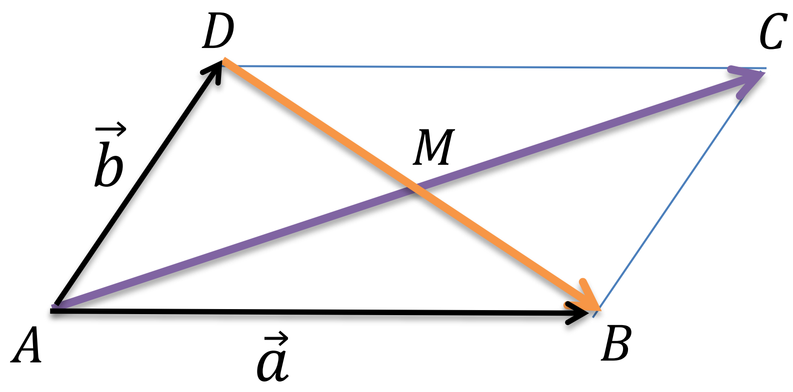
极化恒等式

如图，设$\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{AD}=\vec{b}$,则$\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b},\overrightarrow{DB}=\vec{a}-\vec{b}$,



$$\overrightarrow{AC}^2=(\vec{a}+\vec{b})^2=\left|\vec{a}\right|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2 \qquad (1)$$

$$\overrightarrow{DB}^2=(\vec{a}-\vec{b})^2=\left|\vec{a}\right|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2 \qquad (2)$$

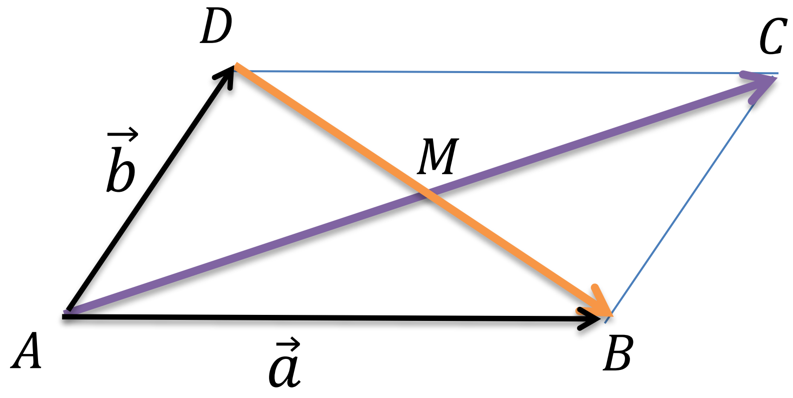
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{4}\left[(\vec{a}+\vec{b})^2-(\vec{a}-\vec{b})^2\right]$$ ——极化恒等式

几何意义： 向量的数量积表示为以这组向量为邻边的平行四边形的“和对角线”与“差对角线”平方差的$\frac{1}{4}$. 即：$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{4}\left[\left|\overrightarrow{AC}\right|^2-\left|\overrightarrow{DB}\right|^2\right]$

平行四边形中的极化恒等式

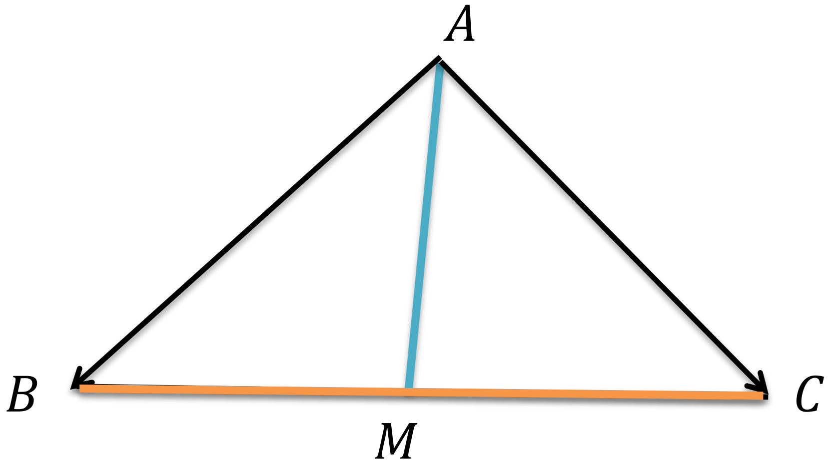
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{4}\left[\left|\overrightarrow{AC}\right|^2-\left|\overrightarrow{DB}\right|^2\right]$$

$$=\left|\overrightarrow{AM}\right|^2-\frac{1}{4}\left|\overrightarrow{DB}\right|^2$$



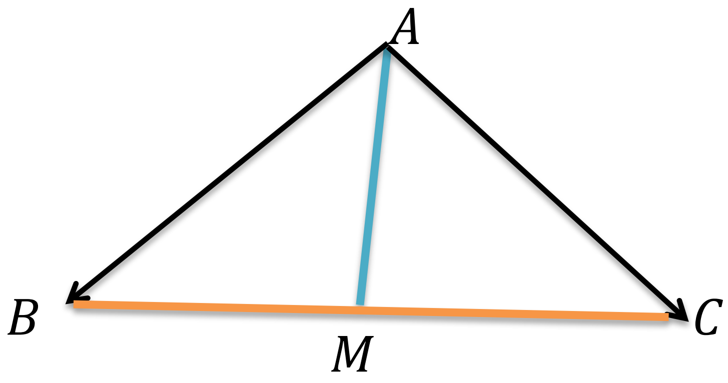
三角形中的极化恒等式

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overline{AC}=\left|\overrightarrow{AM}\right|^2-\frac{1}{4}\left|\overrightarrow{BC}\right|^2$$



题目中对夹角一无所知，给出中线或对边的长

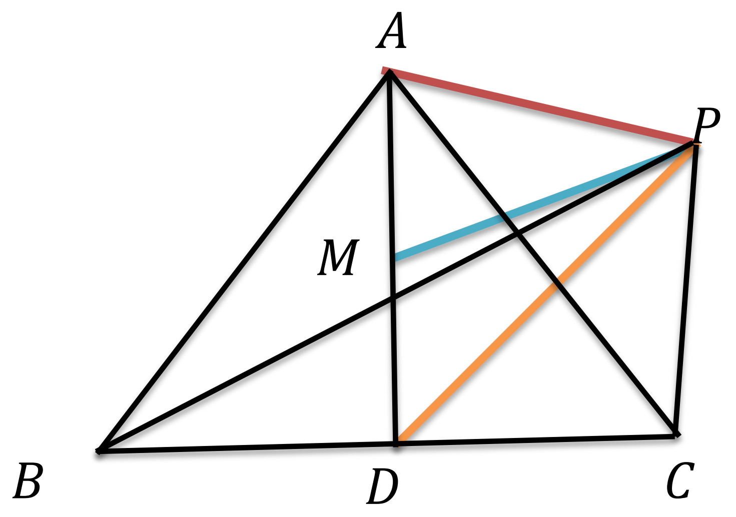
（2012·浙江卷）在ΔABC中，M是BC的中点，$AM=3, BC=10$，则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$ $\underline{-16}$



$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AM}\right|^2-\frac{1}{4}\left|\overrightarrow{BC}\right|^2$$

$$=9-25=-16$$

（2017·新课标2）已知ΔABC是边长为2的等边三角形，P为平面ABC内的一点，$\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$的最小值。



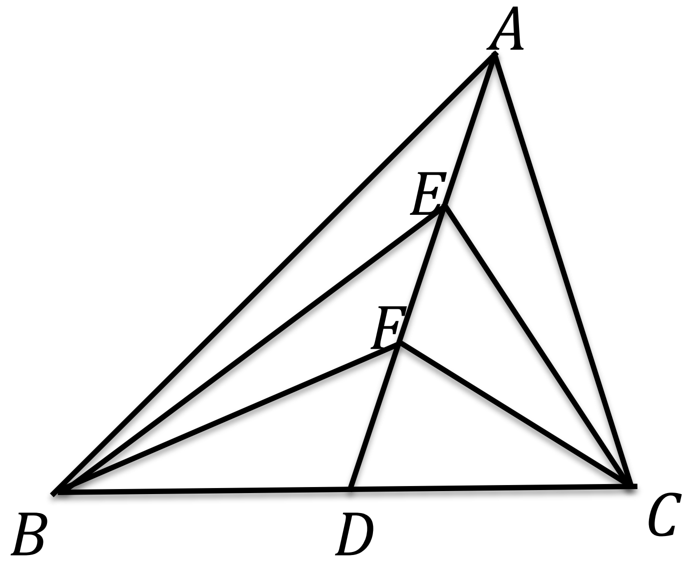
$$\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})=\overrightarrow{PA}\cdot 2\overrightarrow{PD}=2\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PD}$$

$$=2(\overrightarrow{PM}^2-\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}^2)$$

$$=2(\overrightarrow{PM}^2-\frac{3}{4})$$

$$\geq 2(0-\frac{3}{4})=-\frac{3}{2}$$

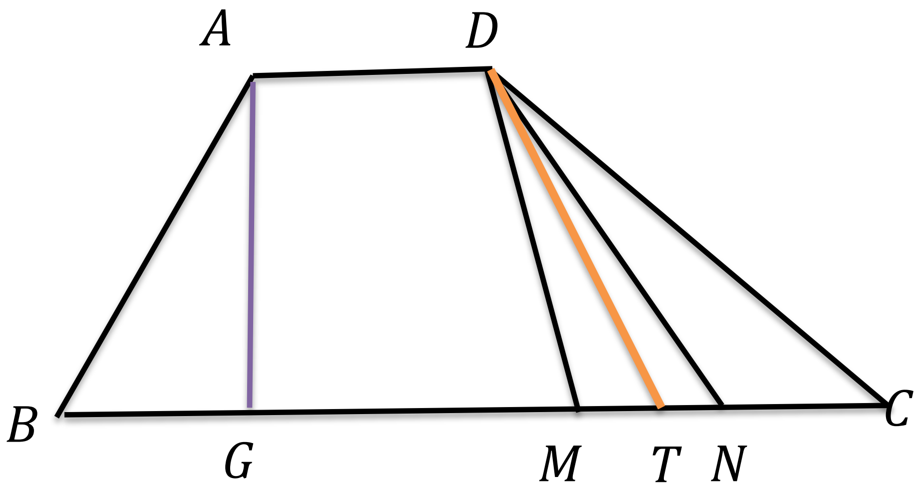
2.（2016·江苏）如图，在三角形ABC中，D是BC的中点，E,F是AD的两个三等分点，$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}=4$，$\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{CF}=-1$，则$\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CE}=$ $\underline{\quad\dfrac{7}{8}\quad}$



（2018 天津）如图，在平面四边形 $ABCD$ 中，$AB\perp BC$，$AD\perp CD$，$\angle BAD=120°$，$AB=AD=1$．若点 E 为边 CD 上的动点，则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BE}$ 的最小值为（　　）

A. $\dfrac{21}{16}$　　B. $\dfrac{3}{2}$　　C. $\dfrac{25}{16}$　　D. 3

（2020·天津）如图，在四边形$ABCD$中，$\angle B=60°, AB=3,$ 且$\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{BC},$ 若M,N是线段BC上的动点，且$\left|\overrightarrow{MN}\right|=1$，则$\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{DN}$的最小值为$\underline{\frac{13}{2}}$



$$\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{DN}=\left|\overrightarrow{DT}\right|^2-\frac{1}{4}\left|\overrightarrow{MN}\right|^2$$
$$=\left|\overrightarrow{DT}\right|^2-\frac{1}{4}$$
$$\geq\left|\overrightarrow{AG}\right|^2-\frac{1}{4}=(\frac{3\sqrt{3}}{2})^2-\frac{1}{4}$$

三角形“四心”与奔驰定理的关系

奔驰定理

已知O是ΔABC内的一点，$\Delta BOC,\Delta AOC,\Delta AOB$的面积分别为$S_A$，$S_B$，$S_C$

则$S_A\bullet\overrightarrow{OA}+S_B\bullet\overrightarrow{OB}+S_C\bullet\overrightarrow{OC}=\vec{0}$

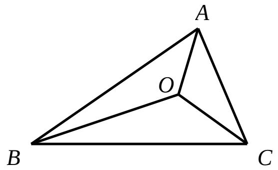
推论:O是ΔABC内的一点，且$x\bullet\overrightarrow{OA}+y\bullet\overrightarrow{OB}+z\bullet\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，则

$$S_{\Delta BOC}:S_{\Delta COA}:S_{\Delta AOB}=x:y:z$$

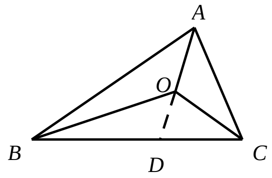
已知 O 是 ΔABC 内的一点，$\Delta BOC,\Delta AOC,\Delta AOB$ 的面积分别为 S_A，S_B，S_C，求证：

$$S_A\bullet\overrightarrow{OA}+S_B\bullet\overrightarrow{OB}+S_C\bullet\overrightarrow{OC}=\vec{0}$$

证明：



图一



图二

如图二 延长AO与BC边相交于点则D

$$\frac{BD}{DC}=\frac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta ACD}}=\frac{S_{\Delta BOD}}{S_{\Delta COD}}=\frac{S_{\Delta ABD}-S_{\Delta BOD}}{S_{ACD}-S_{\Delta COD}}=\frac{S_C}{S_B}$$

$$\because\overrightarrow{OD}=\frac{DC}{BC}\overrightarrow{OB}+\frac{BD}{BC}\overrightarrow{OC}$$

$$\therefore\overrightarrow{OD}=\frac{S_B}{S_B+S_C}\overrightarrow{OB}+\frac{S_C}{S_B+S_C}\overrightarrow{OC}$$

$$\because\frac{OD}{OA}=\frac{S_{BOD}}{S_{BOA}}=\frac{S_{COD}}{S_{COA}}=\frac{S_{BOD}+S_{COD}}{S_{BOA}+S_{COA}}=\frac{S_A}{S_B+S_C}$$

$$\therefore\overrightarrow{OD}=-\frac{S_A}{S_B+S_C}\overrightarrow{OA}$$

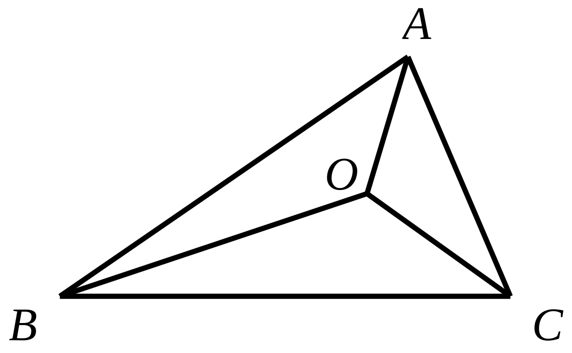
$$-\frac{S_A}{S_B+S_C}\overrightarrow{OA}=\frac{S_B}{S_B+S_C}\overrightarrow{OB}+\frac{S_C}{S_B+S_C}\overrightarrow{OC}$$

$$\therefore S_A\bullet\overrightarrow{OA}+S_B\bullet\overrightarrow{OB}+S_C\bullet\overrightarrow{OC}=\vec{0}$$

由此定理可得三角形四心向量式

O 是 ΔABC 的重心

$$S_{\Delta BOC}:S_{\Delta COA}:S_{\Delta AOB}=1:1:1 \Leftrightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$$



O 是 ΔABC 的内心

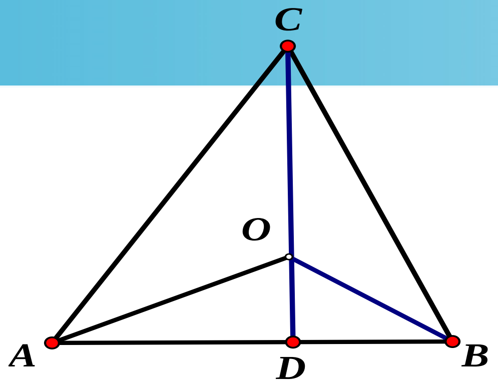
$$S_{\Delta BOC}:S_{\Delta COA}:S_{\Delta AOB}=a:b:c \Leftrightarrow a\bullet\overrightarrow{OA}+b\bullet\overrightarrow{OB}+c\bullet\overrightarrow{OC}=\vec{0}$$

O 是 ΔABC 的外心

$$S_{\Delta BOC}:S_{\Delta COA}:S_{\Delta AOB}=\sin 2A:\sin 2B:\sin 2C \Leftrightarrow \sin 2A\bullet\overrightarrow{OA}+\sin 2B\bullet\overrightarrow{OB}+\sin 2C\bullet\overrightarrow{OC}=\vec{0}$$

O 是 ΔABC 的垂心

$$S_{\Delta BOC}:S_{\Delta COA}:S_{\Delta AOB}=\tan A:\tan B:\tan C \Leftrightarrow \tan A\bullet\overrightarrow{OA}+\tan B\bullet\overrightarrow{OB}+\tan C\bullet\overrightarrow{OC}=\vec{0}$$



证明：如图O为三角形的垂心，$\tan A=\frac{CD}{AD},\tan B=\frac{CD}{DB}\Rightarrow\tan A:\tan B=DB:AD$

$S_{\Delta BOC}:S_{\Delta COA}=DB:AD$

$\therefore S_{\Delta BOC}:S_{\Delta COA}=\tan A:\tan B$

同理得$S_{\Delta COA}:S_{\Delta AOB}=\tan B:\tan C$，$S_{\Delta BOC}:S_{\Delta AOB}=\tan A:\tan C$

$\therefore S_{\Delta BOC}:S_{\Delta COA}:S_{\Delta AOB}=\tan A:\tan B:\tan C$

◆ **例 1** 已知 O 是 ΔABC 内部一点，满足 $\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+m\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，$\dfrac{S_{\Delta AOB}}{S_{\Delta ABC}}=\dfrac{4}{7}$，则实数 $m=$（　　）

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

【秒解】 由奔驰定理可知：$S_{\Delta OBC}\overrightarrow{OA}+S_{\Delta OAC}\overrightarrow{OB}+S_{\Delta OAB}\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，

又 $\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+m\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，

$\therefore S_{\Delta OBC}:S_{\Delta OAC}:S_{\Delta OAB}=1:2:m$，

$\therefore \dfrac{S_{\Delta AOB}}{S_{\Delta ABC}}=\dfrac{m}{1+2+m}=\dfrac{4}{7}$，$\therefore m=4$，选 C.

A

◆ **例 2** 已知 O 是 ΔABC 内部一点，满足 $\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}+5\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，则 ΔABC 的面积与 ΔAOC 的面积之比为________.

【秒解】由奔驰定理可知：

$$S_{\Delta OBC}:S_{\Delta OAC}:S_{\Delta OAB}=1:3:5,$$

3

$$\therefore \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta AOC}}=\frac{1+3+5}{3}=3$$

◆ **例 3（2016 清华领军计划自主招生 27 题）**已知 O 是 ΔABC 内一点，若 $S_{\Delta AOB}:S_{\Delta BOC}:S_{\Delta AOC}=4:3:2$，

设 $\overrightarrow{AO}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$，则实数 λ 和 μ 的值分别为（　）

A. $\frac{2}{9},\frac{4}{9}$　　B. $\frac{4}{9},\frac{2}{9}$　　C. $\frac{1}{9},\frac{2}{9}$　　D. $\frac{2}{9},\frac{1}{9}$

【秒解】$\overrightarrow{AO}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}\Rightarrow\overrightarrow{AO}=\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+\mu(OC-OA)$

$\lambda\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)+\mu\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\right)=\lambda\overrightarrow{OB}+\mu\overrightarrow{OC}-\left(\lambda+\mu\right)\overrightarrow{OA}=\vec{0}$

又 $S_{\Delta AOB}:S_{\Delta BOC}:S_{\Delta AOC}=4:3:2$，根据奔驰定理得：$(1+\lambda+\mu):(-\lambda):(-\mu)=3:2:4$

$\Rightarrow\lambda=\frac{2}{9}$，$\mu=\frac{4}{9}$，选 A.

◆ **例 4** 已知 P 为 ΔABC 内一点，且满足 $|PB|=2$，

$|PA|=2$，$\angle APB=\dfrac{5\pi}{6}$，且 $2\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}+4\overrightarrow{PC}=\vec{0}$，则 ΔABC 的面积为（　　）

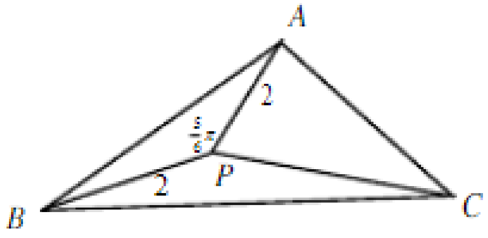
A. $\dfrac{9}{8}$　　B. $\dfrac{4}{3}$　　C. 1　　D. $\dfrac{6}{5}$

【秒解】由条件可知：$S_{\Delta PAB}=\dfrac{1}{2}\times2\times2\times\sin\dfrac{5}{6}\pi=1$，

又由奔驰定理可知：$S_{\Delta PBC}\overrightarrow{PA}+S_{\Delta PAC}\overrightarrow{PB}+S_{\Delta PAB}\overrightarrow{PC}=\vec{0}$

$\therefore S_{\Delta PBC}:S_{\Delta PAC}:S_{\Delta PAB}=2:3:4$

$\therefore S_{\Delta PBC}=\dfrac{1}{2}, S_{\Delta PAC}=\dfrac{3}{4}, S_{\Delta PAB}=1$，$S_{\Delta ABC}=\dfrac{9}{4}$，选 A.



◆ **例 5** 若ΔABC内接于以O为圆心，以 1 为半径的圆，且$3\overrightarrow{OA}+4\overrightarrow{OB}+5\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，则该$\Delta ABC$的面积为____．【秒解】$3\overrightarrow{OA}+4\overrightarrow{OB}+5\overrightarrow{OC}=\vec{0}$

$$\Rightarrow 3\overrightarrow{OA}+4\overrightarrow{OB}=-5\overrightarrow{OC}\Rightarrow(3\overrightarrow{OA}+4\overrightarrow{OB})^2=(-5\overrightarrow{OC})^2\Rightarrow 9+16+24\cos AOB=25\Rightarrow\cos AOB=0\Rightarrow\angle AOB=90^0$$

$$\Rightarrow S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}\times 1\times 1=\frac{1}{2}$$

又由奔驰定理可知：$S_{\Delta OBC}\overrightarrow{OA}+S_{\Delta OAC}\overrightarrow{OB}+S_{\Delta OAB}\overrightarrow{OC}=\vec{0}$

又$3\overrightarrow{OA}+4\overrightarrow{OB}+5\overrightarrow{OC}=\vec{0}$

$$\therefore S_{\Delta OBC}:S_{\Delta OAC}:S_{\Delta OAB}=3:4:5$$

$$\therefore S_{\Delta PBC}=\frac{3}{10},S_{\Delta PAC}=\frac{2}{5},S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2},\ S_{\Delta ABC}=\frac{6}{5}.$$

A

◆**例 6** 已知 P 是 ΔABC 内部一点，满足 $\overrightarrow{AP}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$，则 $\frac{S_{\Delta ABP}}{S_{\Delta ABC}}=$________. ________ **【秒解】**

$$\overrightarrow{AP}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$$

$$\Rightarrow -\overrightarrow{PA}=\frac{2}{5}(\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA})+\frac{1}{5}(\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PA})\Rightarrow \frac{2}{5}\overrightarrow{PA}+\frac{2}{5}\overrightarrow{PB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{PC}=\vec{0}$$

又由奔驰定理可知：$S_{\Delta PBC}\overrightarrow{PA}+S_{\Delta PAC}\overrightarrow{PB}+S_{\Delta PAB}\overrightarrow{PC}=\vec{0}$

$$\therefore S_{\Delta PBC}:S_{\Delta PAC}:S_{\Delta PAB}=\frac{2}{5}:\frac{2}{5}:\frac{1}{5}$$

$$\frac{S_{\Delta ABP}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{5}+\frac{2}{5}+\frac{1}{5}}=\frac{1}{5}$$

综合运用

练 1、O 是平面上一 定点，A、B、C 是平面上不共线的三个点，动点 P 满足

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\lambda(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|})\cdot\lambda\in[0,+\infty)$. 则 P 的轨迹一定通过△ABC 的（　　）.

A．外心　　B．内心　　C．重心　　D．垂心

分析　已知等式即 $\overrightarrow{AP}=\lambda(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|})$，设 $\overrightarrow{AE}=\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|},\overrightarrow{AF}=\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$，显然 $\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AF}$ 都是单位向量，以二者为邻边构造平行四边形，则结果为菱形，故 AP 为 $\angle ABC$ 的平分线，选 B .

练 2、 ΔABC 的外接圆的圆心为 O，两条边上的高的交点为 H，$\overrightarrow{OH}=m(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$，则实数 m =____________.

分析：本题除了利用特殊三角形求解外，纯粹利用向量知识推导则比较复杂，更加重要的一点是缺乏几何直观. 解法如下，由已知，有向量等式 $\overrightarrow{AH}\bullet\overrightarrow{BC}=0$，将其中的向量分解，向已知等式形式靠拢，有 $(\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA})\bullet(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})=0$，将已知代入，有 $[m(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})-\overrightarrow{OA}]\bullet(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})=0$，即 $m(\overrightarrow{OC}^2-\overrightarrow{OB}^2)+(m-1)\overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{BC}=0$，由 O 是外心，得 $(m-1)\overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{BC}=0$，由于 ΔABC 是任意三角形，则 $\overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{BC}$ 不恒为 0，故只有 $m=1$ 恒成立.

或者，过点 O 作 $OM\perp BC$ 与 M，则 M 是 BC 的中点，有 $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$；$H$ 是垂心，则 $AH\perp BC$，故 $\overrightarrow{AH}$ 与 $\overrightarrow{OM}$ 共线，设 $\overrightarrow{AH}=k\overrightarrow{OM}$，则 $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{OA}+\frac{k}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$，又 $\overrightarrow{OH}=m(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$，故可得 $(m-1)\overrightarrow{OA}+(m-\frac{k}{2})\overrightarrow{OB}+(m-\frac{k}{2})\overrightarrow{OC}=0$，有 $m-1=m-\frac{k}{2}=0$，得 $m=1$.

练 3、点 O 是三角形 ABC 所在平面内的一点，满足 $\overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} \bullet \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC} \bullet \overrightarrow{OA}$，则点 O 是 ΔABC 的（　　）.

A．三个内角的角平分线的交点

B．三条边的垂直平分线的交点

C．三条中线的交点

D．三条高的交点

分析　移项后不难得出，$\overrightarrow{OB} \bullet \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OC} \bullet \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{CB} = \vec{0}$，点 O 是 ΔABC 的垂心，选 D .

练 4　已知 O 为 $\triangle ABC$ 所在平面内一点，满足 $|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2=|\overrightarrow{OB}|^2+|\overrightarrow{CA}|^2=|\overrightarrow{OC}|^2+|\overrightarrow{AB}|^2$，则 O 为 $\triangle ABC$ 的______心.

分析　将 $|\overrightarrow{BC}|^2=(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})^2=\overrightarrow{OC}^2+\overrightarrow{OB}^2-2\overrightarrow{OC}\bullet\overrightarrow{OB}$，$|\overrightarrow{CA}|^2,|\overrightarrow{AB}|^2$ 也类似展开代入，已知等式与例 4 的条件一样．也可移项后，分解因式合并化简，O 为垂心.

练 5　在△ABC 内求一点 P，使 $AP^2+BP^2+CP^2$ 最小.

分析　如图 2，构造向量解决. 取 $\overrightarrow{CA}=\vec{a},\overrightarrow{CB}=\vec{b}$ 为基向量，设 $\overrightarrow{CP}=\vec{x}$，有 $\overrightarrow{AP}=\vec{x}-\vec{a},\overrightarrow{BP}=\vec{x}-\vec{b}$.

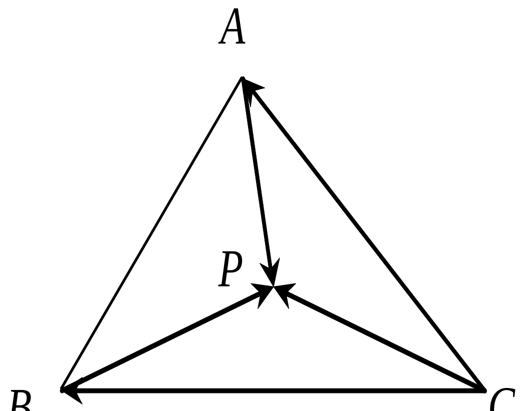


图 2

于是，

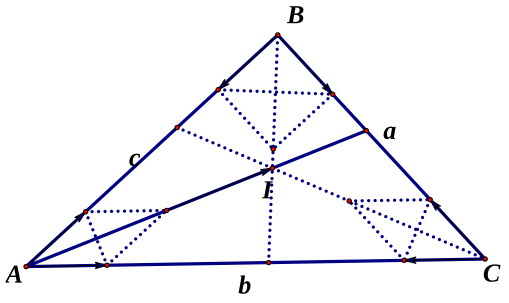
$$AP^2+BP^2+CP^2=(\vec{x}-\vec{a})^2+(\vec{x}-\vec{b})^2+\vec{x}=3[\vec{x}-\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b})]^2+\vec{a}^2.$$

当 $\vec{x}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b})$ 时，$AP^2+BP^2+CP^2$ 最小，此时，即 $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$，则点 P 为△ABC 的重心.

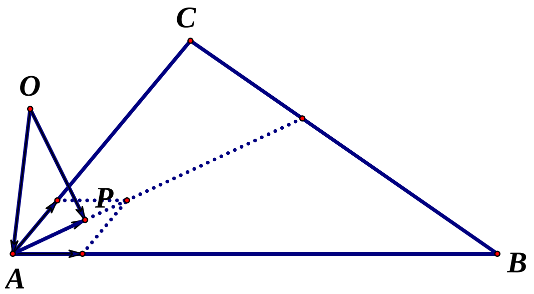
练 6 已知 I 为 $\triangle ABC$ 所在平面上的一点，且 $AB=c$ ， $AC=b$ ， $BC=a$. 若

$a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{0}$，则 I 是 $\triangle ABC$ 的(　　)

. A．重点　B．外心　　C．内心　　D．垂心



图(5)



图(6)

【解析】$\because \overrightarrow{IB}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB}$， $\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AC}$，则由题意得 $(a+b+c)\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}=0$，

$$\because b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\overrightarrow{AB}+\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}\right),$$

$\therefore \overrightarrow{AI}=\dfrac{bc}{a+b+c}\left(\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}+\dfrac{\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}\right)$． $\because \dfrac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}$ 与 $\dfrac{\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}$ 分别为 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$ 方向上的单位向量，$\therefore$

$\overrightarrow{AI}$ 与 $\angle BAC$ 平分线共线，即 AI 平分 $\angle BAC$.

同理可证： BI 平分 $\angle ABC$， CI 平分 $\angle ACB$. 从而 I 是 $\triangle ABC$ 的内心，如图(5).